Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

Metody Obliczeniowe: ćwiczenie 2

Dokonać interpolacji wybranej funkcji jednej zmiennej funkcjami kształtu stopnia 1 oraz 2. Obliczyć normy błędu interpolacji.

Wskazówki:

1. Niech interpolowana funkcja będzie dana wzorem $f(x) = cos(4x)e^{-x},\ x \in [0, 3]$
2. Przyjmijmy, że element 1 jest odcinkiem $[0, 1]$
3. Interpolacja Lagrange'a pierwszego stopnia w elemencie 1: $u_h(x) = f(0)\varphi_1(x) + f(1)\varphi_2(x)$, gdzie
   $f(0) = 1,\ f(1) = -0.2405$ - stopnie swobody
   $\varphi_1(x) = \dfrac{x-1}{0-1} = 1 - x,\ \varphi_2(x) = \dfrac{x-0}{1-0} = x$ - liniowe funkcje kształtu Lagrange'a
4. Błąd interpolacji: $e(x) = f(x) - u_h(x)$
5. Norma błędu: $||e|| = \sqrt{\int_0^1 e^2 \, \mathrm{d}x}$
6. Błąd względny: $\dfrac{||e||}{||f||} = 90.2\%$
7. Interpolacja stopnia 2. Można albo wprowadzić trzeci węzeł np. w punkcie x=0.5 i zastosować 3 funkcje Lagrange'a stopnia 2, albo poprzednią interpolację liniową wzbogacić funkcją stopnia 2, t.zw. "bubble", przyjmującą wartości zerowe w dotychczasowych węzłach $x = 0,\ x = 1$
8. Zastosujmy to drugie podejście. Niech $\varphi_3(x) = x(x - 1)$. Interpolant kwadratowy będzie postaci
   $u_{hp} = u_h + \alpha\varphi_3(x)$
9. Dodatkowy stopień swobody α można tak dobrać aby zminimalizować błąd interpolacji, czyli
   $||f - u_h - \alpha\varphi_3||^2 \to \min \ \Rightarrow \ \alpha \int_0^1 \varphi_3\varphi_3 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi_3(f - u_h) \, \mathrm{d}x$. Stąd $\alpha = 2.315$ i błąd wzgl. = 22.3%
10. Wnioski:
    - poprawa dokładności aproksymacji odbywa się przez zmniejszenie wymiaru elementu (h) albo podniesienie stopnia funkcji kształtu (p)
    - stopnie swobody mogą być wartościami przybliżanej funkcji, tu $f(0), f(1)$
    - dobre własności aproksymacyjne mają zbiory funkcji kształtu wśród których są takie, których suma jest funkcją stałą (tu $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, więc zastosowane aproksymacje stopnia 1 i 2 mają tę własność)